

Contrôle continu N° 1

(Durée : 1h 30 mn)

Les réponses doivent être concises et précises.

Exercice 1. (7 points)

1) Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, que

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

2) Calculer la limite de la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin \left(\frac{k}{n} \right).$$

3) On considère la suite réelle $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$v_n = \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k}{n^2} \right) \cdot \sin \left(\frac{k}{n} \right).$$

(i) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que

$$\sum_{k=1}^n k^3 \sin \left(\frac{k}{n} \right) \leq n^4.$$

(ii) En utilisant 1) et 3) (i), montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n - \frac{1}{6n^2} \leq v_n \leq u_n.$$

(iii) En déduire de 2) et 3) (ii), que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 2. (3 points) En utilisant la première formule de la moyenne, déterminer la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt.$$

Exercice 3. (10 points) Soit F la fonction définie par

$$F(x) = \int_1^x \frac{\log t}{1+t^2} dt.$$

- 1) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.
- 2) Quel est le signe de F sur \mathbb{R}_+^* ?
- 3) Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et donner l'expression de $F'(x)$.
- 4) Soit $x > 0$. Exprimer $F(\frac{1}{x})$ en fonction de $F(x)$.
- 5) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctg} t}{t} dt$ converge.
- 6) (i) Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, que

$$F(x) = (\log x) (\operatorname{Arctg} x) - \int_1^x \frac{\operatorname{Arctg} t}{t} dt.$$

(ii) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0.

- 7) (i) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{1+t^2} dt$ converge.

(ii) En déduire de 6) (ii) et 7) (i), que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{1+t^2} dt$ converge.



ETU SUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..